Predgovor

V začetku 20. stoletja je veliki matematik David Hilbert opazil, da ima več pomembnih matematičnih tematik zelo podobno zgradbo. V resnici je ugotovil, da jih lahko, če vse skupaj do neke mere posplošimo, obravnavamo kot isto problematiko. To opažanje in druga podobna so bila podlaga za vznik nove veje matematike in eden njenih temeljnih konceptov je bil poimenovan po Hilbertu. Pojem hilbertovega prostora meče luč na velik del moderne matematike, od teorije števil do kvantne mehanike, tako da se ne morete imeti za dobro izobražene matematike, če ne poznate vsaj osnov teorije hilbertovih prostorov.

Kaj je torej hilbertov prostor? V tipičnem univerzitetnem programu je definiran kot poln realen unitaren prostor. Od študentov, vpisanih v takšen program, se pričakuje, da iz prejšnjih predavanj vedo, da je realni prostor unitaren, če je vektorski in opremljen s skalarnim produktom, in da je prostor poln, če je vsako cauchyjevo zaporedje v njem konvergentno. Seveda morajo, če želijo razumeti to definicijo, poznati definicije vektorskega prostora, skalarnega produkta, cauchyjevega zaporedja in konvergence. Da podam eno izmed njih (ne najdaljše): cauchyjevo zaporedje je takšno zaporedje $x_1, x_2, x_3, \ldots$, da za vsako pozitivno število ε obstaja takšno celo število N, da je za vsaki dve celi števili p in q, večji od N, razlika med x_p in x_q največ ε.

Na kratko: da bi imeli kakršnokoli upanje, da boste razumeli, kaj je hilbertov prostor, se morate najprej naučiti in premleti celotno hierarhijo manj zahtevnih pojmov. Ni presenetljivo, da to zahteva čas in trud. Isto velja za večino najpomembnejših matematičnih idej. Domet knjige, ki želi podati poljuden uvod v matematiko (še posebej, če mora biti kratek), je torej zelo omejen.

Namesto da bi se poskusil spretno izogniti tej težavi, sem se osredotočil na drugačno oviro za matematično sporazumevanje. Je bolj filozofske kot tehnične narave in nas glede na pojme, kot so neskončnost, kvadratni koren iz minus ena, šestindvajseta dimenzija in ukrivljeni prostor, ločuje na tiste, ki smo z njimi zadovoljni, in tiste, ki se nam zdijo moteče paradoksalni. A tovrstne matematične ideje nam lahko postanejo domače, ne da bi se potopili v strokovno izrazoslovje, in poskusil bom pokazati, kako.

Če lahko rečemo, da ima pričujoča knjiga sporočilo, potem se to glasi: naučite se razmišljati abstraktno, saj s takim mišljenjem marsikatera filozofska težava preprosto izgine. V drugem poglavju natančno razložim, kaj mislim z abstraktno metodo. V prvem se posvečam bolj domači in njej sorodni vrsti abstrakcije: destiliranju bistvenih sestavin problemov iz resničnega sveta, posledično pretvarjanju le-teh v matematične. Ti dve poglavji in tretje, v katerem razložim, kaj pomeni strog dokaz, se nanašajo na splošno matematiko.

Potem razpravljam o bolj specifičnih temah. Zadnje poglavje govori bolj o matematikih kot o matematiki, zato je nekoliko drugačno. Sicer je knjiga urejena kar se da nehierarhično, saj si ne domišljam, da bo bralec sproti razumel in si zapomnil vse; predlagam pa, da poglavje 2 preberete pred tistimi, ki mu sledijo.

Branje ne zahteva veliko predhodnega znanja – maturitetno ali kaj podobnega bi moralo biti več kot dovolj –, vendar pa pričakujem od bralca nekaj zanimanja, rajši kot da ga poskušam pričarati sam. Torej nisem uporabljal anekdot, risank, klicajev, šaljivih naslovov poglavij ali slik mandelbrotove množice. Izognil sem se tudi temam, kot so teorija kaosa in gödlov izrek, ki precej bolj vplivata na ljudsko domišljijo kot pa na trenutne matematične raziskave in ki ju tako ali tako dobro obravnavajo številne druge knjige. Raje sem izbral bolj vsakdanje teme in o njih podrobneje spregovoril, da bi pokazal, kako jih lahko bolj kompleksno razumemo. Z drugimi besedami, stremel sem h globini in ne k širini ter želel prenesti privlačnost glavnega toka matematike tako, da sem mu dovolil govoriti samemu zase.

Rad bi se zahvalil Clayevemu matematičnemu institutu in Princetonski univerzi za njuno podporo in gostoljubnost med pisanjem knjige. Zelo sem hvaležen Gilbertu Adairju, Rebecci Gowers, Emily Gowers, Patricku Gowersu, Joshui Katzu in Edmundu Thomasu za prebiranje zgodnejših osnutkov. Čeprav so prepametni in preveč izobraženi, da bi šteli kot povprečni bralci, je pomirjujoče vedeti, da je, kar sem napisal, razumljivo vsaj nekaterim nematematikom. Njihove pripombe so prispevale k številnim izboljšavam. To knjigo posvečam Emily v upanju, da si bo lažje predstavljala, kaj cele dneve počnem.

1. poglavje
Modeli

Kako vreči kamen

Denimo, da na brezvetrn dan stojite na ravni površini in držite v roki kamen, ki ga želite vreči čim dlje. Ker je moč, s katero lahko vržete kamen, dana, je vaša najpomembnejša odločitev, pod kakšnim kotom ta kamen vreči. Če bo kot premajhen, bo kamen, čeprav bo imel veliko hitrost v vodoravni smeri, hitro padel na tla in zato v tem času ne bo priletel prav daleč. Po drugi strani bo pri prevelikem kotu kamen sicer dolgo časa v zraku, a se ne bo kaj prida daleč premaknil. Očitno bo prava odločitev nekje vmes.

Z uporabo newtonove fizike in nekaj elementarnega odvajanja lahko pridemo do najboljše možnosti, ki se glede na okoliščine izkaže za precej naravno: kamen mora v trenutku, ko ga izpustite, leteti pod kotom 45 stopinj glede na vodoravnico. Iste enačbe pokažejo, da tir kamna opiše parabolo, povedo pa tudi, kakšna je hitrost tega kamna v poljubnem trenutku leta.

Zdi se torej, da lahko celotno gibanje kamna od trenutka, ko odleti iz vaše roke, do trenutka, ko pade na tla, uspešno predvidimo s kombinacijo naravoslovja in matematike. Vendar pa moramo, če želimo, da bo res tako, nekaj stvari poenostaviti. Najpomembnejša izmed njih je, da na kamen ne deluje nobena sila razen Zemljine težnosti ter da sta smer in velikost le-te v vsaki točki leta enaki. To v resnici seveda ne velja, saj ne upoštevamo zračnega upora, vrtenja Zemlje, majhnega vpliva Lunine gravitacije, dejstva, da moč težnosti pada z nadmorsko višino in postopnega spreminjanja smeri »navpično navzdol« pri premikanju po zemeljski površini. Tudi če vse to sprejmete, enačbe, ki dajo rezultat 45 stopinj, še vedno temeljijo na predpostavki, da lahko kamen vržete enako močno v katerokoli smer. Ampak to seveda ne drži: kamen lahko vržete močneje pri manjšem kotu.

Nekateri izmed teh protiargumentov so očitno pomembnejši kot drugi. Do kakšne mere naj jih torej upoštevamo v naših izračunih in kolikšen pomen naj pripišemo predpostavkam, ki iz njih sledijo? Eden od možnih pristopov je, da poskušamo upoštevati čim več dejavnikov. A izkaže se, da je veliko bolj razumna naslednja taktika: premislite, kakšno natančnost potrebujete in jo nato poskušajte doseči na čim preprostejši način. Če veste, da bo določena poenostavitev le malo vplivala na končni rezultat, potem jo kar privzemite.

Učinek zračnega upora na kamen, na primer, ne bo prav velik, saj je kamen majhen, trd in razmeroma gost. Ker bo verjetno že pri samem metu kamna prišlo do precejšnjega odstopanja od želenega kota, si nima smisla izračuna še dodatno oteževati z upoštevanjem zračnega upora. Če pa to vseeno želite, bo za večino primerov zadoščal naslednji recept: pri večjem zračnem uporu je za dosego istega učinka kamen potrebno metati pod manjšim kotom.

Kaj je matematični model?

Ko preučujemo rešitev nekega fizikalnega problema, je pogosto, čeprav ne zmeraj, možno jasno razločiti, kaj so k izidu prispevale empirične vede in kaj matematika. Najprej se znanstveniki domislijo teorije, ki temelji na rezultatih poskusov in opazovanj, hkrati pa upošteva splošnejše zahteve, kakršni sta preprostost in pojasnjevalna moč. Nato matematiki – ali pa znanstveniki sami z matematiko – premislijo o čisto logičnih posledicah teorije. Te so včasih le rezultati povsem rutinskih izračunov, ki predvidijo pojave točno takšnega tipa, kot naj bi jih teorija pojasnila, tu in tam pa so lahko tudi zares presenetljive. Če slednje potrdimo še eksperimentalno, dobimo prepričljive dokaze teoriji v prid.

Pojem potrditve znanstvenega predvidevanja pa je nekoliko problematičen ravno zaradi poenostavitev, s kakršnimi smo imeli opravka. Za zgled vzemimo newtonove zakone o gibanju in težnosti, iz katerih sledi, da če spustimo dva predmeta z iste višine, bosta na tla (če so ravna) priletela istočasno. Ta pojav, na katerega je prvi opozoril Galileo, je nekoliko v nasprotju z našo intuicijo. V resnici je več kot le v nasprotju z našo intuicijo: če poskusite sami, denimo z žogico za golf in žogico za namizni tenis, boste ugotovili, da žogica za golf pade na tla prva. V kakšnem smislu je imel torej Galileo prav?

Razlog, zakaj z našim drobnim poskusom ne moremo ovreči Galilejeve teorije, je seveda zračni upor: poskusi pokažejo, da teorija deluje dobro, če je zračni upor majhen. Če se vam zdi kar preveč priročno, da zračni upor priskoči na pomoč vsakič, ko se napovedi Newtonove mehanike izkažejo za napačne, potem se vam bo zaupanje v znanost in občudovanje Galilea povrnilo, če boste imeli kdaj možnost opazovati, kako pada pero v vakuumu – dejansko ravno tako kot kamen.

Kakorkoli že, naravoslovna opažanja nikoli niso povsem neposredna in dokončna, zato potrebujemo boljši način opisovanja odnosov med naravoslovjem in matematiko. Matematiki znanstvenih teorij ne aplicirajo neposredno na resnični svet, ampak rajši na *modele*. Na model lahko gledamo kot na namišljeno, poenostavljeno različico dela preučevanega sveta, v kateri so natančni izračuni možni. V primeru kamna lahko odnos med svetom in modelom približno ponazorimo z odnosom med slikama 1 in 2.